ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки

Том 23, № 121 2018

УДК 517.911
DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-31-43

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЯЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В ЗАДАЧЕ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© С. В. Корнев, В. В. Обуховский

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»
394043, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Ленина, 86
E-mail: kornev _ vrn@rambler.ru, valerio-ob2000@mail.ru

Аннотация. Предложены новые методы решения задачи об асимптотическом поведении траекторий управляемых объектов, описываемых функционально-дифференциальными включениями как с выпуклозначными правыми частями, так и с правыми частями, не обладающими свойством выпуклости значений. В качестве основного инструмента исследования рассматриваемой задачи использован метод интегральных направляющих потенциалов. Применение указанного метода позволяет установить оценки норм траекторий рассматриваемых объектов на вещественной полуоси.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; асимптотическое поведение решений; интегральный направляющий потенциал

Введение

Основные идеи метода направляющих функций были сформулированы М.А. Красносельским и А.И. Перовым еще в середине XX века (см. [1, 2]). Будучи геометрически наглядным, этот метод первоначально применялся к изучению периодических и ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [3-5]). Позже этот метод был распространен на случай дифференциальных включений (см., например, [6, 7]), функционально-дифференциальных уравнений и включений (см. [8, 9]) и другие объекты (см., например, [10-13]). Как известно, дифференциальные включения – достаточно удобный математический аппарат, описывающий нелинейные управляемые системы с обратной связью, системы автоматического регулирования, системы с разрывными и импульсными характеристиками и другие объекты современной инженерии, механики, физики (см., например, [14-18]). Сфера применения метода направляющих функций была расширена на изучение качественного поведения и бифуркации решений (см., например, [19-27]), асимптотики решений (см., например, [28-32]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 17-51-52022, 16-01-00370, 16-01-00386).

Эти и другие аспекты метода направляющих функций и его приложений, а также дополнительную библиографию, можно найти в недавно вышедшей монографии [23].

В настоящей работе определяется интегральный направляющий потенциал для функционально-дифференциальных включений и с его помощью исследуется задача об асимптотическом поведении решений рассматриваемого класса включений. Этот тип поведения решений для случая дифференциальных уравнений тесно связан с существованием гетероклинических и гомоклинических решений (см., например, [33-34]).

В работе сначала предполагается, что правая часть включения является многозначным отображением, имеющим выпуклые компактные значения, удовлетворяющим верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста. В силу специфики объекта в качестве основного инструмента исследования рассматриваемой задачи используется модифицированный метод классических направляющих функций. А именно, метод интегральных направляющих потенциалов вдоль заданной функции.

Затем показано, что рассматриваемый метод оказывается эффективен и в случае, когда правая часть не обладает свойством выпуклости значений и является нормальным мультиотображением с компактными значениями. Заметим, что класс нормальных мультиотображений достаточно обширен. В него входят, например, ограниченные почти полунепрерывные снизу мультиотображения с компактными значениями.

1. Основные определения и обозначения.

В дальнейшем используются известные понятия и терминология из теории многозначных отображений (мультиотображений) (см., например, [6, 7, 14, 16, 35]). Напомним некоторые из них.

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — метрические пространства. Символами $P(Y)$, $C(Y)$, $K(Y)$ обозначаются совокупности всех, соответственно, непустых, замкнутых или компактных подмножеств пространства Y. Если Y — нормированное пространство, то символом $Kv(Y)$ обозначается совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства Y.

Определение 1.1. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется *полунепрерывным сверху (пн. св.) в точке* $x_0 \in X$, если для каждого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x_0) \subset V$ найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $d_X(x_0, x) < \delta$ следует, что $F(x) \subset V$.

Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется *пн. св.*, если оно пн. св. в каждой точке $x \in X$.

Определение 1.2. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется *полунепрерывным снизу (пн. сн.) в точке* $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $F(x') \cap V \neq \emptyset$ для любого $x' \in U(x_0)$.

Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется *пн. сн.*, если оно пн. сн. в каждой точке $x \in X$.

Пусть I — замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, снабженное мерой Лебега.

О п р е д е л е н и е 1.3. Мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ называется *почти пн. сн.*, если существует последовательность непересекающихся компактных множеств $\{I_n\}, I_n \subseteq I$, таких, что

(i) $\mu(I \setminus \bigcup\limits_n I_n) = 0$, где μ – мера Лебега;

(ii) сужение F на каждое множество $J_n = I_n \times X$ является пн. сн. мультиотображением.

Мультиотображение будем называть *мультифункцией*, если оно определено на подмножестве числовой прямой.

О п р е д е л е н и е 1.4. Мультифункция $F : I \to K(Y)$ называется *измеримой*, если для любого открытого подмножества $W \subset Y$ его прообраз

$$F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\}$$

является измеримым подмножеством I.

З а м е ч а н и е 1.1. Согласно классической теореме Куратовского – Рылль-Нардзевского, всякая измеримая мультифункция $F : I \to K(Y)$ обладает измеримым сечением, то есть существует такая измеримая функция $f : I \to Y$, что $f(t) \in F(t)$ почти для всех (п.в.) $t \in I$.

Для $h > 0$ обозначим символом $\mathcal{C}$ пространство $C([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$ непрерывных функций $x : [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t \in [-h,0]} \|x(t)\|$. Для данной функции $\psi \in \mathcal{C}$, символом $\mathcal{D}_\psi$ обозначается множество всех непрерывных функций $x : [-h, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $x(t) = \psi(t)$, $t \in [-h, 0]$ и сужение x на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ является абсолютно непрерывной функцией.

Для функции $x \in \mathcal{D}_\psi$ и $t \geq 0$ символом $x_t \in \mathcal{C}$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$.

О п р е д е л е н и е 1.5. Мультиотображение $F : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет *верхним (нижним) условиям Каратеодори*, если:

$F_{1_\infty})$ для каждой функции $\varphi \in \mathcal{C}$ мультифункция $F(\cdot, \varphi) : \mathbb{R}_+ \to K(\mathbb{R}^n)$ допускает измеримое сечение;

$F_{2_\infty})$ почти для всех фиксированных $t \in \mathbb{R}_+$ мультиотображение $F(t, \cdot) : \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ пн. св. (пн. сн.).

Если мультиотображение $F : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет и верхним и нижним условиям Каратеодори, то будем говорить, что оно удовлетворяет *условиям Каратеодори.*

З а м е ч а н и е 1.2. Для выполнения условия (F_{1_∞}) достаточно, чтобы мультифункция $F(\cdot, \varphi)$ была измерима для каждого $\varphi \in \mathcal{C}$.

О п р е д е л е н и е 1.6. Мультиотображение $F : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет *условию подлинейного роста*, если

F_{3_∞}) существует положительная суммируемая на каждом компактном интервале функция $\alpha(\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ такая, что для каждого $\varphi \in \mathcal{C}$

$$\|F(t,\varphi)\| := \max_{y \in F(t,\varphi)} \|y\| \le \alpha(t)(1 + \|\varphi\|)$$

п.в. $t \in \mathbb{R}_+$.

О п р е д е л е н и е 1.7. Мультиотображение $R:\mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$, назовем *нормальным*, если оно ограничено, то есть найдется такая константа $M > 0$, что $\|R(t,\varphi)\| \le M$ для всех $(t,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}$ и существует мультиотображение $F : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$, называемое *нормальным квазисечением* мультиотображения R, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) мультиотображение F удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста;

(ii) $F(t,\varphi) \cap R(t,\varphi) \ne \emptyset$ для всех $\varphi \in \mathcal{C}$;

(iii) каждое решение $x \in \mathcal{D}_\psi$ включения $x'(t) \in F(t, x_t)$ является решением включения $x'(t) \in R(t, x_t)$.

З а м е ч а н и е 1.3. (см., например, [7]). Очевидно, что всякое ограниченное мультиотображение $R : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее верхним условиям Каратеодори, является нормальным. Всякое ограниченное почти пн.сн. мультиотображение $R : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ и, в частности, ограниченное мультиотображение, удовлетворяющее условиям Каратеодори является нормальным.

2. Основные результаты.

Будем рассматривать сначала задачу Коши для функционально-дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in F(t, x_t) \quad \text{п.в. } t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.1}$$

$$x(t) = \psi(t) \quad t \in [-h, 0], \tag{2.2}$$

в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста.

Исследуется вопрос о существовании решений задачи (2.1), (2.2), удовлетворяющих следующей оценке:

$$\|x(t)\| \le \frac{k}{g(t)}, \quad t \in \mathbb{R}_+,\ k > 0,$$

где $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

Для каждого начального условия $\psi \in \mathcal{C}$ под решением задачи (2.1), (2.2) понимается функция $x \in \mathcal{D}_\psi$, удовлетворяющая включению (2.1) п.в. $t \in \mathbb{R}_+$.

Обозначим символом $\mathfrak{V}$ совокупность всех непрерывно дифференцируемых функций $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих *условию коэрцитивности*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} V(x) = -\infty.$$

Пусть $V \in \mathfrak{V}$. Заметим, что для каждого $r > 0$ найдется $k(r) > r$ такое, что если

$$\alpha_r := \inf\{V(x),\ \|x\| \leq r\},$$

то

$$V(x) < \alpha_r,\ \|x\| \geq k(r). \tag{2.3}$$

Пусть теперь $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – непрерывно дифференцируемая функция такая, что

$$\inf\{g(t),\ t \in \mathbb{R}\} \geq 1.$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Функция $V \in \mathfrak{V}$ называется *интегральным направляющим потенциалом для включения (2.1) вдоль функции* g, если существует

$$r_V > g(0)\|\psi(0)\| \tag{2.4}$$

такое, что для каждой функции $x \in \mathcal{D}_\psi$, удовлетворяющей условиям

(j) существует число $\tau_1^x > 0$ такое, что

$$g(t)\|x(t)\| \leq r_V \quad \text{для всех } t \in [0, \tau_1^x);$$

(jj) существует число $\tau_*^x > \tau_1^x$ такое, что

$$g(\tau_*^x)\|x(\tau_*^x)\| = k_V := k(r_V);$$

(jjj) $\|x'(t)\| \leq \|F(t, x_t)\|$ для п.в. $t \in \mathbb{R}_+$;

имеем

$$\int_{\tau_\sharp^x}^{\tau_*^x} \big\langle \nabla V(g(s)x(s)), g'(s)x(s) + g(s)f(s) \big\rangle ds \geq 0 \tag{2.5}$$

для каждого локально суммируемого сечения $f(s) \in F(s, x_s)$, где

$$\tau_\sharp^x := \sup\{\tau \in [\tau_1^x, \tau_*^x),\ \|g(\tau)x(\tau)\| = r_V\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Если $V \in \mathfrak{V}$ является интегральным направляющим потенциалом для включения (2.1) вдоль функции g, то каждое решение задачи Коши (2.1), (2.2) удовлетворяет следующей оценке:*

$$\|x(t)\| \leq k_V \cdot \frac{1}{g(t)}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий $(F_{1_\infty}) - (F_{3_\infty})$ и основных свойств дифференциальных включений (см., например, [6, 7, 15-17]) следует, что все решения задачи (2.1), (2.2) продолжимы с конечного промежутка на $\mathbb{R}_+$ и множество таких решений непусто.

Пусть $x(\cdot)$ – произвольное решение задачи (2.1), (2.2), определенное на $\mathbb{R}_+$.

Из (2.4) следует, что найдется $\tau_1^x > 0$ такое, что

$$g(t)\|x(t)\| \leq r_V < k_V,\ t \in [0, \tau_1^x). \tag{2.7}$$

Если $\tau_1^x = +\infty$, то

$$\|x(t)\| < k_V \cdot \frac{1}{g(t)}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

и утверждение доказано.

Если $t_1 < +\infty$, то оценка (2.7) справедлива только на конечном промежутке. Покажем, что

$$g(t)\|x(t)\| \leq k_V,\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.8}$$

В предположении противного найдется $\tau_2^x > \tau_1^x$ такое, что

$$g(\tau_2^x)\|x(\tau_2^x)\| > k_V. \tag{2.9}$$

Из (2.7) и (2.9) следует существование $\tau_1^x < \tau_*^x < \tau_2^x$, при котором

$$g(\tau_*^x)\|x(\tau_*^x)\| = k_V. \tag{2.10}$$

Пусть

$$\tau_\sharp^x = \sup\{\tau \in [\tau_1^x, \tau_*^x),\ g(\tau)\|x(\tau)\| = r_V\},$$

следовательно,

$$g(\tau_\sharp^x)\|x(\tau_\sharp^x)\| = r_V.$$

Отсюда, в силу (2.3), получаем следующую оценку

$$V(g(\tau_\sharp^x)x(\tau_\sharp^x)) \geq \alpha_{r_V}. \tag{2.11}$$

Из определения 2.1 имеем

$$V(g(\tau_*^x)x(\tau_*^x)) - V(g(\tau_\sharp^x)x(\tau_\sharp^x)) =$$

$$= \int_{\tau_\sharp^x}^{\tau_*^x} \big\langle \nabla V(g(s)x(s)), g'(s)x(s) + g(s)x'(s) \big\rangle ds \geq 0.$$

Откуда и из соотношений (2.3), (2.10) и (2.11) имеем

$$\alpha_{r_V} > V(g(\tau_*^x)x(\tau_*^x)) \geq V(g(\tau_\sharp^x)x(\tau_\sharp^x)) \geq \alpha_{r_V}.$$

Полученное противоречие и доказывает справедливость оценки (2.8).

Будем рассматривать теперь задачу Коши для функционально-дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in R(t, x_t) \quad \text{п.в. } t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.12}$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in [-h, 0], \tag{2.13}$$

в предположении, что мультиотображение $R : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ является нормальным.

Теорема 2.2. *Если* $V \in \mathfrak{V}$ *является интегральным направляющим потенциалом для включения (2.12) вдоль функции* g, *то найдется по крайней мере одно решение задачи Коши (2.12), (2.13), удовлетворяющее оценке (2.6).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть мультиотображение F является квазисечением мультиотображения R.

Рассмотрим решение $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ задачи Коши

$$x'(t) \in F(t, x_t) \quad \text{п.в. } t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.14}$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in [-h, 0]. \tag{2.15}$$

В силу (iii) Определения 1.7 оно является и решением задачи Коши (2.12), (2.13). Если для него $\tau_1^x = +\infty$, то оценка (2.8) выполнена.

Если же $\tau_1^x < +\infty$, то

$$\int_{\tau_\sharp^x}^{\tau_*^x} \big\langle \nabla V(g(s)x(s)), g'(s)x(s) + g(s)x'(s) \big\rangle ds \geq 0,$$

поскольку $x'(s) \in R(s, x_s)$ – локально суммируемое сечение.

Тогда, проводя те же рассуждения, что и при доказательстве Теоремы 2.1, получим искомую оценку для данного решения x задачи Коши (2.12), (2.13).

Следствие 2.1. *Пусть* $V \in \mathfrak{V}$ *является интегральным направляющим потенциалом вдоль функции* g *для включения (2.12), правая часть* $R : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ *которого ограничена и почти пн. сн. Тогда найдется по крайней мере одно решение задачи Коши (2.12), (2.13), удовлетворяющее оценке (2.6).*

Следствие 2.2. *Пусть* $V \in \mathfrak{V}$ *является интегральным направляющим потенциалом вдоль функции* g *для включения (2.12), правая часть* $R : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ *которого ограничена и удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда найдется по крайней мере одно решение задачи Коши (2.12), (2.13), удовлетворяющее оценке (2.6).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А., Перов А.И.* Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1958. Т. 123. № 2. С. 235–238.

2. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

3. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

4. *Mawhin J.* Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems // CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 40. American Mathematical Society. Providence: R.I., 1979.

5. *Mawhin J., Ward James R.Jr.* Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations // Discrete Continuous Dynamical Systems. 2002. Vol. 8. № 1. P. 39–54.

6. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Изд. 2-е. М.: Либроком, 2011.

7. *Górniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. 2nd Ed. Berlin: Springer, 2006.

8. *Fonda A.* Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations // Proceeding American Mathematical Society. 1987. Vol. 99. № 1. P. 79–85.

9. *Kornev S., Obukhovskii V.* On some developments of the method of integral guiding functions // Functional Differential Equations. 2005. Vol. 12. № 3-4. P. 303–310.

10. *Корнев С.В., Обуховский В.В.* Интегральные направляющие функции и периодические решения включений с каузальными операторами // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. Вып. 1. С. 55–65.

11. *Корнев С.В.* Метод негладких интегральных направляющих функций в задаче о существовании периодических решений включений с каузальными операторами // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия Математическое моделирование и программирование. 2016. Т. 9. № 2. С. 46–59.

12. *Kornev S., Obukhovskii V., Zecca P.* Guiding functions and periodic solutions for inclusions with causal multioperators // Applicable Analysis. 2017. Vol. 96. Issue 3. P. 418–428.

13. *Kornev S.V., Liou Y.-C., Loi N.V., Obukhovskii V.V.* On periodic solutions of random differential inclusions // Applied Analysis and Optimization. 2017. Vol. 1. Issue. 2. P. 245–258.

14. *Arutyunov A., Obukhovskii V.* Convex and Set-Valued Analysis. Selected Topics. Berlin; Boston: De Gruyter Graduate, Walter de Gruyter, 2017.

15. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 264. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

16. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces // De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 7. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2001.

17. *Kikuchi N.* On control problems for functional-differential equations // Funkcialaj Ekvacioj. 1971. Vol. 14. P. 1–23.

18. *Kisielewicz M.* Differential Inclusions and Optimal Control. Kluwer, Dordrecht: PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1991.

19. *Kryszewski W.* Homotopy properties of set-valued mappings. Torun: Uni N. Copernicus Publishing, 1997.

20. *Obukhovskii V., Loi N.V., Kornev S.* Existence and global bifurcation of solutions for a class of operator-differential inclusions // Differential Equations and Dynamical Systems. 2012. Vol. 20. P. 285–300.

21. *Obukhovskii V., Loi N.V., Yao J.-C.* A bifurcation of solutions of nonlinear Fredholm inclusions involving CJ-multimaps with applications to feedback control systems // Set-Valued Variational Analysis. 2013. Vol. 21. P. 247–269.

22. *Loi N.V., Obukhovskii V., Zecca P.* On the global bifurcation of periodic solutions of differential inclusions in Hilbert spaces // Nonlinear Analysis. 2013. Vol. 76. P. 80–92.

23. *Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S.* Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis // Lecture Notes in Math. Vol. 2076. Berlin: Springer, 2013.

24. *Obukhovskii V., Loi N.V., Liu Z.* On an A-bifurcation theorem with application to a parametrized integro-differential system // Fixed Point Theory. 2015. Vol. 16. P. 127–142.

25. *Obukhovskii V., Loi N.V., Yao J.-C.* A multiparameter global bifurcation theorem with application to a feedback control system // Fixed Point Theory. 2015. Vol. 16. P. 353–370.

26. *Корнев С.В., Лой Н.В.* Метод многолистных направляющих функций в задаче о бифуркации решений дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 390–401.

27. *Kornev S.V., Liou Y.-C.* Multivalent guiding functions in the bifurcation problem of differential inclusions // The Journal of Nonlinear Science and Applications. 2016. Vol. 9. Issue 8. P. 5259–5270.

28. *Avramescu C.* Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations and generalized guiding functions // Electronic Journal of Qualitive Theory of Differential Equations. 2003. Vol. 13. P. 1–9.

29. *Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.-C.* On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions // Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization. 2014. Vol. 34. Issue 2. P. 219–227.

30. *Корнев С.В., Обуховский В.В.* Асимптотическое поведение решений дифференциальных включений и метод направляющих функций // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 6. С. 700–705.

31. *Корнев С.В.* Асимптотическое поведение решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2016. № 1. С. 96–104.

32. *Obukhovskii V., Kamenskii M., Kornev S., Liou Y.-C.* On asymptotics of solutions for a class of differential inclusions with a regular right-hand part // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. 2017. Vol. 18. № 5. P. 967–975.

33. *Avramescu C.* Evanescent solutions of linear ordinary differential equations // Electronic Journal of Qualitive Theory of Differential Equations. 2002. Vol. 9. P. 1–12.

34. *Avramescu C.* Existence problems for homoclinic solutions // Abstract and Applied Analysis. 2002. Vol. 7. P. 1–29.

35. *Deimling K.* Multivalued Differential Equations. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

Поступила в редакцию 24 января 2018 г.
Прошла рецензирование 08 февраля 2018 г.
Принята в печать 20 февраля 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Корнев Сергей Викторович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, e-mail: kornev _ vrn@rambler.ru

Обуховский Валерий Владимирович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, зав. кафедрой высшей математики, e-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Для цитирования: *Корнев С.В., Обуховский В.В.* Интегральные направляющие потенциалы в задаче об асимптотическом поведении решений функционально-дифференциальных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 121. С. 31–43. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-31-43

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-31-43

INTEGRAL GUIDING POTENTIALS IN THE PROBLEM OF ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS FOR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS

© S. V. Kornev, V. V. Obukhovskii

Voronezh State Pedagogical University
86 Lenina St., Voronezh 394043, Russian Federation
E-mail: kornev _ vrn@rambler.ru, valerio-ob2000@mail.ru

Abstract. The new method to solving the problem of the asymptotic behavior of trajectories for control systems governed by functional differential inclusions with convex-valued and nonconvex-valued right-hand sides is introduced. As the main tool of solving the problem the method of integral guiding potentials is applied. The application of this method makes it possible to establish estimates for the norms of trajectories for above systems.
Keywords: functional differential inclusion; asymptotic behavior of solutions; integral guiding potential

REFERENCES

1. Krasnoselskiy M.A., Perov A.I. Ob odnom printsipe sushchestvovaniya ogranichennykh, periodicheskikh i pochti-periodicheskikh resheniy u sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [On existence principle for bounded, periodic and almost periodic solutions to the systems of ordinary differential equations]. *Doklady Akademii Nauk SSSR – Doklady Mathematics*, 1958, vol. 123, no. 2, pp. 235–238. (In Russian).

2. Krasnoselskiy M.A. *Operator sdviga po traektoriyam differentsial'nykh uravneniy* [The Operator of Translation along the Trajectories of Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1966. (In Russian).

3. Krasnoselskiy M.A., Zabreyko P.P. *Geometricheskie metody nelineynogo analiza* [Geometrical Methods of Nonlinear Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1975. (In Russian).

4. Mawhin J. Topological degree methods in nonlinear boundary value problems. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 40. American Mathematical Society.* Providence, R.I. Publ., 1979.

5. Mawhin J., Ward James R.Jr. Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations. *Discrete Continuous Dynamical Systems*, 2002, vol. 8, no. 1, pp. 39–54.

6. Borisovich Y.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskiy V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vklyucheniy. Izd. 2-e.* [Introduction to the Theory of Multivalued Maps and Differential Inclusions. 2nd Ed.]. Moscow, Librokom Publ., 2011. (In Russian).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects №№ 17-51-52022, 16-01-00370, 16-01-00386).

7. G'orniewicz L. *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. 2nd Ed.* Berlin, Springer Publ., 2006.

8. Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations. *Proceeding American Mathematical Society*, 1987, vol. 99, no. 1, pp. 79–85.

9. Kornev S., Obukhovskii V. On some developments of the method of integral guiding functions. *Functional Differential Equations*, 2005, vol. 12, no. 3-4, pp. 303–310.

10. Kornev S.V., Obukhovskiy V.V. Integral'nye napravlyayushchie funktsii i periodicheskie resheniya vklyucheniy s kauzal'nymi operatorami [Integral guiding functions and periodic solutions for inclusions with causal multimap]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 1, pp. 55–65. (In Russian).

11. Kornev S.V. Metod negladkikh integral'nykh napravlyayushchikh funktsiy v zadache o sushchestvovanii periodicheskikh resheniy vklyucheniy s kauzal'nymi operatorami [The method of nonsmooth integral guiding functions in the problem of existence of periodic solutions for inclusions with causal multimap]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie – The Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2016, vol. 9, no. 2, pp. 46–59. (In Russian).

12. Kornev S., Obukhovskii V., Zecca P. Guiding functions and periodic solutions for inclusions with causal multioperators. *Applicable Analysis*, 2017, vol. 96, issue 3, pp. 418–428.

13. Kornev S.V., Liou Y.-C., Loi N.V., Obukhovskii V.V. On periodic solutions of random differential inclusions. *Applied Analysis and Optimization*, 2017, vol. 1, issue 2, pp. 245–258.

14. Arutyunov A.V., Obukhovskii V. *Convex and Set-Valued Analysis. Selected Topics.* Berlin, Boston, De Gruyter Graduate Publ., Walter de Gruyter Publ., 2017.

15. Aubin J.-P., Cellina A. *Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 264.* Berlin, Springer-Verlag Publ., 1984.

16. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. *De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 7.* Berlin, New York, Walter de Gruyter Publ., 2001.

17. Kikuchi N. On control problems for functional-differential equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, 1971, vol. 14, pp. 1–23.

18. Kisielewicz M. *Differential Inclusions and Optimal Control.* Kluwer, Dordrecht, PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1991.

19. Kryszewski W. *Homotopy Properties of Set-Valued Mappings.* Torun, Uni N. Copernicus Publishing, 1997.

20. Obukhovskii V., Loi N.V., Kornev S. Existence and global bifurcation of solutions for a class of operator-differential inclusions. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 2012, vol. 20, pp. 285–300.

21. Obukhovskii V., Loi N.V. and Yao J.-C. A bifurcation of solutions of nonlinear Fredholm inclusions involving CJ-multimaps with applications to feedback control systems. *Set-Valued Variational Analysis*, 2013, vol. 21, pp. 247–269.

22. Loi N.V., Obukhovskii V., Zecca P. On the global bifurcation of periodic solutions of differential inclusions in Hilbert spaces. *Nonlinear Analysis*, 2013, vol. 76, pp. 80–92.

23. Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. *Lecture Notes in Math. Vol. 2076.* Berlin, Springer Publ., 2013.

24. Obukhovskii V., Loi N.V., Liu Z. On an A-bifurcation theorem with application to a parametrized integro-differential system. *Fixed Point Theory*, 2015, vol. 16, pp. 127–142.

25. Obukhovskii V., Loi N.V., Yao J.-C. A multiparameter global bifurcation theorem with application to a feedback control system. *Fixed Point Theory*, 2015, vol. 16, pp. 353–370.

26. Kornev S.V., Loi N.V. Metod mnogolistnykh napravlyayushchikh funktsiy v zadache o bifurkatsii resheniy differentsial'nykh uravneniy [Multivalent guiding functions in the bifurcation problem of differential equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 2, pp. 390–401. (In Russian).

27. Kornev S. V., Liou Y.-C. Multivalent guiding functions in the bifurcation problem of differential inclusions. *The Journal of Nonlinear Science and Applications*, 2016, vol. 9, issue 8, pp. 5259–5270.

28. Avramescu C. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations and generalized guiding functions. *Electronic Journal of Qualitive Theory of Differential Equations*, 2003, vol. 13, pp. 1–9.

29. Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.-C. On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions. *Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization*, 2014, vol. 34, issue 2, pp. 219–227.

30. Kornev S.V., Obukhovskiy V.V. Asimptoticheskoe povedenie resheniy differentsial'nykh vklyucheniy i metod napravlyayushchikh funktsiy [On asymptotic behavior of solutions of differential inclusions and the method of guiding functions]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 6, pp. 700–705. (In Russian).

31. Kornev S.V. Asimptoticheskoe povedenie resheniy differentsial'nykh vklyucheniy s nevypukloy pravoy chast'yu [On asymptotic behavior of solutions of differential inclusions with nonconvex right-hand side]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – The Bulletin of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 1, pp. 96–104. (In Russian).

32. Obukhovskii V., Kamenskii M., Kornev S., Liou Y.-C. On asymptotics of solutions for a class of differential inclusions with a regular right-hand part. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 967–975.

33. Avramescu C. Evanescent solutions of linear ordinary differential equations. *Electronic Journal of Qualitive Theory of Differential Equations*, 2002, vol. 9, pp. 1–12.

34. Avramescu C. Existence problems for homoclinic solutions. *Abstract and Applied Analysis*, 2002, vol. 7, pp. 1–29.

35. Deimling K. *Multivalued Differential Equations*. Berlin, New York, Walter de Gruyter Publ., 1992.

Received 24 January 2018
Reviewed 08 February 2018
Accepted for press 20 February 2018
There is no conflict of interests.

Kornev Sergey Viktorovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Higher Mathematics Department, e-mail: kornev _ vrn@rambler.ru

Obukhovskii Valeri Vladimirovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Higher Mathematics Department, e-mail: valerio-ob2000@mail.ru

For citation: Kornev S.V., Obukhovskii V.V. Integralnye napravlyayushchie potenziali v zadache ob assimptoticheskom povedenii resheniy funkzionalno-differentsialnykh vklyucheniy [Integral guiding potentials in the problem of asymptotic behavior of solutions for functional differential inclusions]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 121, pp. 31–43. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-31-43 (In Russian, Abstr. in Engl.).